# Toets

# Elektriciteit en Magnetisme 1

# Donderdag 27 mei 2010

# 9:15-11:00

**Schrijf op *elk* vel uw naam en studentnummer**

**Maak elke opgave op een *apart* vel**

# Opgave 0

Schrijf uit in cartesische coördinaten

a) $\vec{\nabla} f$

b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

c) $\vec{\nabla} \times \vec{A}$

d) $\vec{\nabla}^2 f$

# Opgave 1

Gegeven is de vectorfunctie:

$$\vec{G}(x,y,z) = yz^2\hat{x} + (xz^2 + 2)\hat{y} + (2xyz - 1)\hat{z}$$

a) Laat zien dat $\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$

b) Vanwege het rotatietheorema geldt nu dat voor ieder pad *P*, $\oint_P \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0$

Laat dit expliciet zien voor het pad $P_1$ uit figuur 1.

c) Omdat $\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ bestaat er een scalaire potentiaalfunctie $F(x,y,z)$ zodat $\vec{G} = -\vec{\nabla}F$. Bepaal deze functie $F(x,y,z)$.

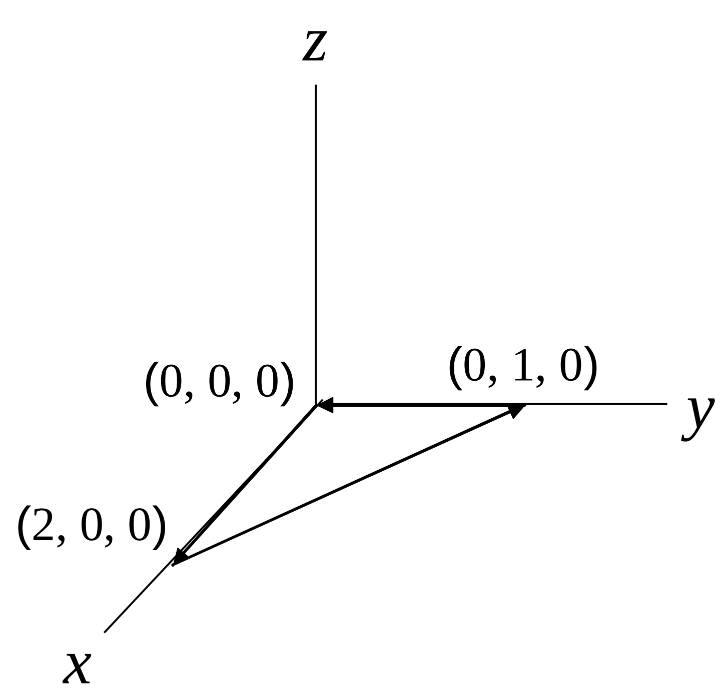


Fig.1: Pad $P_1$ (0,0,0) → (2,0,0) →(0,1,0) →(0,0,0)

# Opgave 2

Gegeven is een oneindig lange cilindrische staaf met straal $R$. De staaf heeft een uniforme ladingsdichtheid $\rho_0$ (Zie figuur 2).

a) Bereken het elektrische veld buiten en binnen de staaf.
b) Bereken de potentiaal buiten en binnen de staaf. Kies het nulpunt voor de potentiaal op $s$=0.

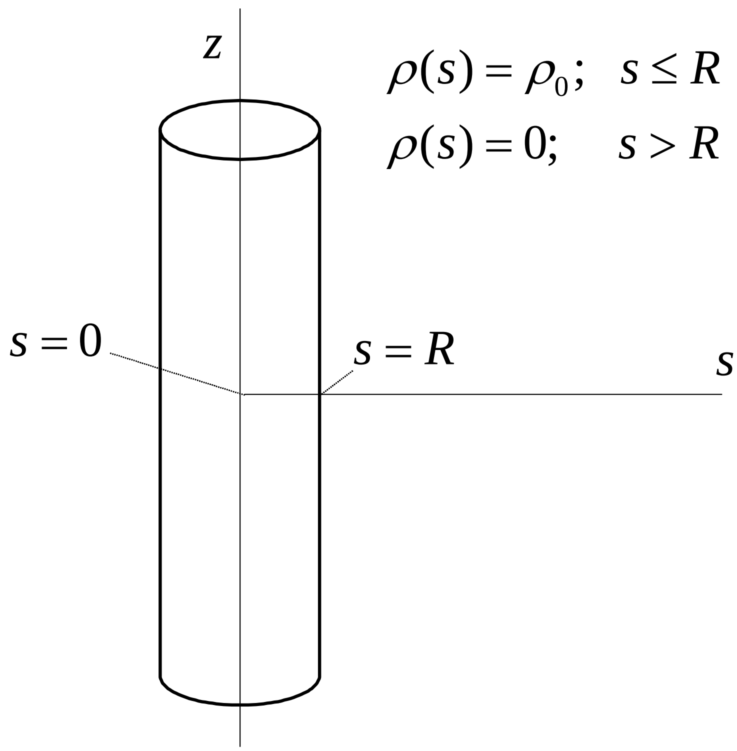


Fig.2: Geometrie voor opgave 2.

# Opgave 3

Twee metalen platen zijn aangesloten op een spanningsbron die een potentiaalverschil $V$ tussen de platen veroorzaakt. De afstand tussen de platen bedraagt $2d$ (zie figuur 3, bovenste situatie). De platen hebben een oppervlak $A$. De afmetingen van de platen zijn zeer veel groter dan de afstand $d$. Het geheel kan worden opgevat als een vlakke plaat condensator: Buiten de platen geldt voor het elektrische veld: $\vec{E} = 0$.

a) Bereken, uitgaande van de definitie van potentiaal, het elektrische veld (in vectorvorm) tussen de beide platen in termen van $V$ en $d$. Kies de $z$-richting zoals aangegeven in figuur 3.
b) Bepaal de ladingsdichtheid $\sigma$ op de bovenste plaat (in termen van $V$, $d$ en $\varepsilon_0$).

Men brengt een diëlektrische plaat met dikte $d$ en relatieve diëlektrische constante $\varepsilon_r$ tussen de platen zodanig dat de onderste helft van de ruimte tussen de platen met diëlektricum is gevuld (zie figuur 3, onderste situatie).

c) Maak aannemelijk dat de diëlektrische verplaatsing $\vec{D}$ overal tussen de platen (d.w.z. zowel in het diëlektricum als boven het diëlektricum) hetzelfde is.
d) Laat zien dat ladingsdichtheid op de bovenste plaat nu gegeven wordt door

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V}{(\varepsilon_r + 1)d}.$$

e) Bereken het elektrisch veld in het diëlektricum (in termen van $V$, $d$ en $\varepsilon_0$).
f) Laat zien dat de gebonden ladingsdichtheid op de bovenkant van het diëlektricum gegeven wordt door

$$\sigma_b = -\frac{V}{d}\left[\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 1}\right].$$

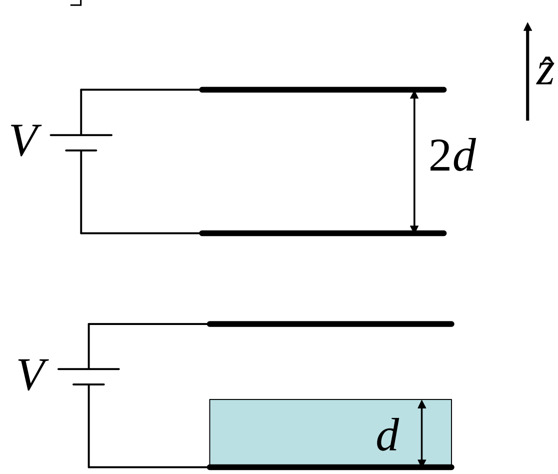


Fig.3: Vlakke plaat condensator zonder (boven) en met (onder) diëlektricum.

Uitwerkingen
Opgave 0
Zie kaft Griffiths

Opgave 1

$$\vec{\nabla}\times\vec{G}=\left(\frac{\partial G_z}{\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial G_x}{\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial G_y}{\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\hat{z}=$$

$$(2xz-2xz)\hat{x}+(2yz-zyz)\hat{y}+(0-0)\hat{z}=0$$

(0,0,0) → (2,0,0); dan $y$=0; $z$=0, $dy$=0, $dz$=0, $\vec{G}.d\vec{l}=0$

(2,0,0) → (0,1,0); dan $y=-\frac{1}{2}x+1$; $dy=-\frac{1}{2}dx$, z=0; $dz$=0, $\vec{G}.d\vec{l}=2dy$ of $\vec{G}.d\vec{l}=-dx$

(0,1,0) →(0,0,0); dan $x$=0, $z$=0, $dx$=0, $dz$=0, $\vec{G}.d\vec{l}=2dy$

$$\oint_{P_1}\vec{G}\cdot d\vec{l}=\int_0^2 0dx+\int_0^1 2dy+\int_1^0 2dy=0$$

$$F(x,y,z)=-\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}G(x',y',z')dx'dy'dz'=-\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}0dx'-\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}2dy'-\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}(2x'y'z'-1)dz=$$

$$-\left(2y+xyz^2-z\right)$$

Opgave 2
De E-velden staan in de $\hat{s}$-richting

Gebruik voor het bepalen van de velden de wet van Gauss met een Gauss-cilinder (lengte $l$ en straal $s$).

$$\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

voor $s>R$; $Q_{enc}=\pi R^2 l\rho_0$ en dus $2\pi slE=\frac{\pi R^2 l\rho_0}{\varepsilon_0}$ en $E=\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 s}$

voor $s\le R$; $Q_{enc}=\pi s^2 l\rho_0$ en dus $2\pi slE=\frac{\pi s^2 l\rho_0}{\varepsilon_0}$ en $E=\frac{\rho_0 s}{2\varepsilon_0}$

Voor de potentiaal kiezen we het nulpunt via $V(s=0)=0$.

$$V(s)-V(0)=V(s)=-\int_0^s\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

voor $s \le R$; $V(s) = -\int_0^s \frac{\rho_0 s'}{2\varepsilon_0} ds' = -\frac{\rho_0 s^2}{4\varepsilon_0}$

voor $s > R$; $V(s) = -\int_0^R \frac{\rho_0 s'}{2\varepsilon_0} ds' - \int_R^s \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 s'} ds' = -\frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \ln\left[\frac{s}{R}\right]$

Opgave 3

a)

Merk op dat het elektrische veld in de negatieve $z$-richting wijst. Van boven naar beneden.

$$V = V_+ - V_- = -\int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{2d}^0 E dz = 2dE$$

dus $\vec{E} = -\frac{V}{2d}\hat{z}$

b)

Wet van Gauss toepassen met een Gauss doosje waarvan het boven oppervlak in de bovenste plaat zit en het onderoppervlak in het vacuüm tussen de platen. De zijoppervlakken doen vanwege de richting van het veld niet mee. In de geleider is het elektrische veld gelijk aan nul en dus evenzo de flux door het bovenoppervlak.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 0A + EA = EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

dus $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$

en samen met onderdeel a levert dit $\sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{2d}$

c)

Door het aanbrengen van de diëlektrische plaat en doordat de potentiaal constant gehouden wordt, verandert de oppervlakteladingsdichtheid op de vlakke platen. Noem de nieuwe oppervlakteladingsdichtheid $\sigma'$.

We gebruiken nu hetzelfde Gauss doosje als bij onderdeel b. Alleen gebruiken we nu de verplaatsing $\vec{D}$. Verder realiseren we ons dat $\vec{D}$ ook in de negatieve $z$-richting wijst en dat de verplaatsing in de geleider nul is (geen E-veld en geen polarisatie). De onderkant van dit Gauss doosje bevindt zich in het vacuüm boven het diëlektricum. We bepalen dan de verplaatsing in het vacuüm als volgt.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0D + DA = \sigma' A$$

dus $\vec{D} = -\sigma' \hat{z}$

Voor het diëlektricum bepalen we de verplaatsing op soortgelijke wijze maar nu met een Gauss doosje met de onderkant in de onderste plaat en de bovenkant in het diëlektricum. In dit geval vallen de mintekens tengevolge van de negatieve lading op de onderste plaat en die van de verschillende richting van de verplaatsing en de oppervlaktevector op de bovenkant van het Gauss doosje tegen elkaar weg en vinden we dezelfde uitdrukking voor de verplaatsing.
Een andere manier om dit in te zien is een doosje te maken met de bovenkant in het vacuüm en de onderkant in het diëlektricum. Toepassen van de wet van Gauss voor de verplaatsing levert dan dat de flux van de verplaatsing door het doosje nul moet zijn omdat er geen omsloten *vrije* lading is. Dus $D$ op het bovenoppervlak (in vacuüm) en onderoppervlak (in diëlektricum) moeten gelijk zijn.

d)

Maak gebruik van $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}$ dan

In het vacuüm: $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = -\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} \hat{z}$

In het diëlektricum: $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = -\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \hat{z}$

Het potentiaalverschil $V$ wordt nu als volgt opgebouwd,

$$V = V_+ - V_- = -\int_{2d}^{d} \frac{\sigma'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} dz - \int_{d}^{0} \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} dz = \frac{\sigma' d}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} + 1 \right) = \frac{\sigma' d}{\varepsilon_0} \left( \frac{\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r} \right)$$

en dus

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r V}{(\varepsilon_r + 1) d}$$

Merk op dat als $\varepsilon_r = 1$, dit overgaat in de situatie van onderdeel b.

e)

Gebruik bovenstaand resultaat,

$$\vec{E} = \frac{-\sigma'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \hat{z} = -\frac{V}{2d} \left( \frac{2}{\varepsilon_r + 1} \right) \hat{z}$$

Merk op dat als $\varepsilon_r = 1$ dit het veld is zonder diëlektricum.

f)
Hiervoor bepalen we eerst de polarisatie.

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E} = -\frac{V}{2d}\left(\frac{2\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)}{\varepsilon_r + 1}\right)\hat{z}$$

en dus de gebonden oppervlakte-ladingsdichtheid op het bovenoppervlak van het diëlektricum is,

$$\sigma_b = \vec{P}.\hat{n} = -\frac{V}{2d}\left[\frac{2\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)}{\varepsilon_r + 1}\right]$$